

Het polyhedron als omwentelingslichaam gevormd door « isoknopen » driehoeken.

Philippe Samyn

(1320) NL
03/440
2018-02-26

Introductie

Vanaf het einde van de jaren '60, biedt de FORTRAN IV-taal de mogelijkheid om parametrische tekeningen in drie dimensies te construeren. Echter was het indertijd noodzakelijk om over een computer te beschikken met de benodigde rekenkracht alsook een grafische printer.

In 1970 kon ik, in het informaticacentrum van de Université Libre de Bruxelles (ULB), de geometrie van de « Wing Building » modelleren¹. Hierdoor kon ik, het jaar daarop, dit driedimensionaal virtueel model gebruiken om de gehele structuur te berekenen in het Massachusetts Institute of Technology (MIT)².

De beschikbare tijd op de grote computers, welke nodig was voor de berekeningen, waren zelfs op MIT te beperkt. Om deze reden moest ik de grafische resultaten met de hand tekenen, net zoals ik de 'isobarische' en 'isoknopen' structuren bestudeerden met een tekenhaak op een deurblad, fungerend als tekentafel, in mijn kamer op Harvard Street nr. 361 (app 3 c/o Aragon), Cambridge, Massachusetts.

Mijn interesse voor het leren van de kunst van het bouwen, in parallel met de rekenkunst van de ingenieur, mobiliseerde al mijn energie terug naar België, in juli 1972 (deze interesses mobiliseren me nog steeds!). Ik moest me toen echter beperken tot de geringe resultaten van mijn gedachtegang, welke toen gepubliceerd waren in het tijdschrift 'Neuf' in 1974 en voorgelegd op de '2nd International Conference on Space Structures' in 1975.³

Het is dan ook 45 jaar later, met alle inzetbare rekenkracht en computertechnologieën dat ik het onafgewerkte werk herneem. Nu schrijft men niet langer meer zijn eigen rekenprogramma's, men bezigt ze nu 'helemaal gebruiksklaar'. Dit is hoe de volgende illustraties werden geproduceerd door Ali Laghrari met Rhinoceros en zijn bijhorende 'assistent' Grasshopper.

De generatie van de polyhedron

Figuur 1 illustreert een cirkel met straal R_0 die een regelmatige veelhoek omschrijft met n zijden, elk met een lengte van $2L_0$ ($L_0=R_0 \cdot \sin(180^\circ/n)$ of $L_0=R_0 \cdot \sin N$; met $N=180^\circ/n$). In het vlak en binnen de polygoon⁴, vormen deze zijden de basis van n gelijkbenige driehoeken « 2α », met als hoogte $H_0=R_0 \cdot \sin N/\tan \alpha$ en van zijkant $B_0=R_0 \cdot \sin N/\sin \alpha$ met als tophoek 2α . De veelhoek gevormd door deze hoekpunten te verbinden, is ingeschreven in een cirkel met als straal $r_0=R_0 \cdot \sin(\alpha-N)/\sin \alpha$ en zijn n zijden met als lengte $2l_0=2R_0 \cdot \sin(\alpha-N) \cdot \sin N/\sin \alpha$ vormen de basis van een tweede reeks van n gelijkbenige driehoeken met als tophoek $2\beta=2(\alpha-N)$, ingeschreven in de eerste reeks om, samen, een vlakke ring van $2n$ driehoeken te vormen.

¹ "Structure of the Wing Building", Ph. Samyn, afstudeerwerk, Faculteit Toegepaste Wetenschappen U.L.B., juni 1971 (BE).

² "Analysis of a 40-storey building, reticulated membrane bearing wall", Ph. Samyn, M.S.thesis, M.I.T, juni 1972 (VS).

³ REVUE NEUF, nr.51, September-October 1974, pp. 53-58 (BE) ; Proceedings of the 2nd International Conference on Space Structures – University of Surrey, Guilford, England, 1975, pp. 621-634 (GB).

⁴ Ze kunnen ook, en zonder onderscheid, buiten de veelhoek worden gerangschikt; Dit terwijl ze in het vlak blijven ofwel loodrecht staan op het vlak op de zijden van een normaal prisma met n-zijden, om hetzelfde resultaat te bekomen.

ring worden aan het einde van $4i-1$ iteraties. Deze eerste 'zee-egel'-vorm met hoogte h bestaat zo uit $4i$ (ofwel $360^\circ/\gamma$) reeksen van $2n$ driehoeken, ingeschreven in een geheel bestaande uit een platte ring en $4i-1$ afgeknotte kegelvormige ringen.

Figuur 3 illustreert een 'zee-egel' voor $n=20$, $\alpha=30^\circ$, en $\gamma=15^\circ$. Met als hoogte h en diameter d , is hij ingeschreven in een kegel met als tophoek 2ε . De opeenvolgende iteraties leiden tot het opstapelen van steeds kleiner en kleiner wordende 'zee-egels', maar (steeds als $\gamma = 90^\circ/i$) van dezelfde verhouding ($h/R_0=\text{constant}$) tot h (en R_0) nul, ingeschreven in een hoekkegel met als vertex 2ε , en met hoogte H .

Twee andere kegels karakteriseren de 'zee-egel', zijnde de ene met als basis de startcirkel met straal R_0 (met als hoekopening $2\varepsilon_1$) alsook diegene met als basiscirkel $R_{0.1}$ (hoekopening gelijk aan $2\varepsilon_2$). De hoekopeningen (ε , ε_1 , ε_2) van de kegels, die het polyhedron insluiten, zijn zo afhankelijk van n (het aantal zijden van de oorspronkelijke polygoon), van 2α (de hoek aan de bovenkant van de gelijkbenige driehoeken) en van γ (de hoek tussen de vlakken die de eerste n driehoeken van de eerste reek van $2n$ driehoeken en het horizontale vlak bevatten. (of de 'stap') welke 2γ wordt voor de eerste n driehoeken van de tweede reeks van $2n$ driehoeken, enzovoort) welke corresponderen met $\delta_0, \delta_1, \dots$ (de hoeken van de omhullende kegels van de opeenvolgende reeks van $2n$ driehoeken).

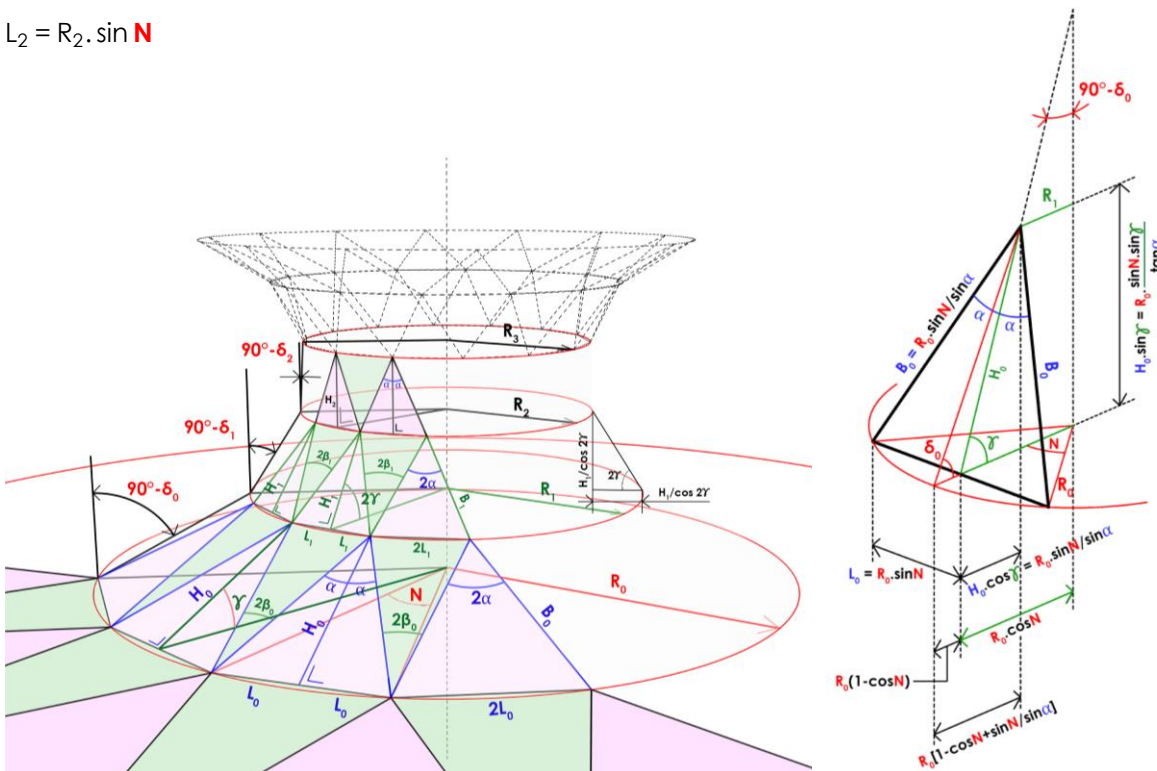
Figuur 2

$$R_1 = R_0 \cdot \left(1 - \frac{\sin N \cdot \cos \gamma}{\tan \alpha}\right)$$

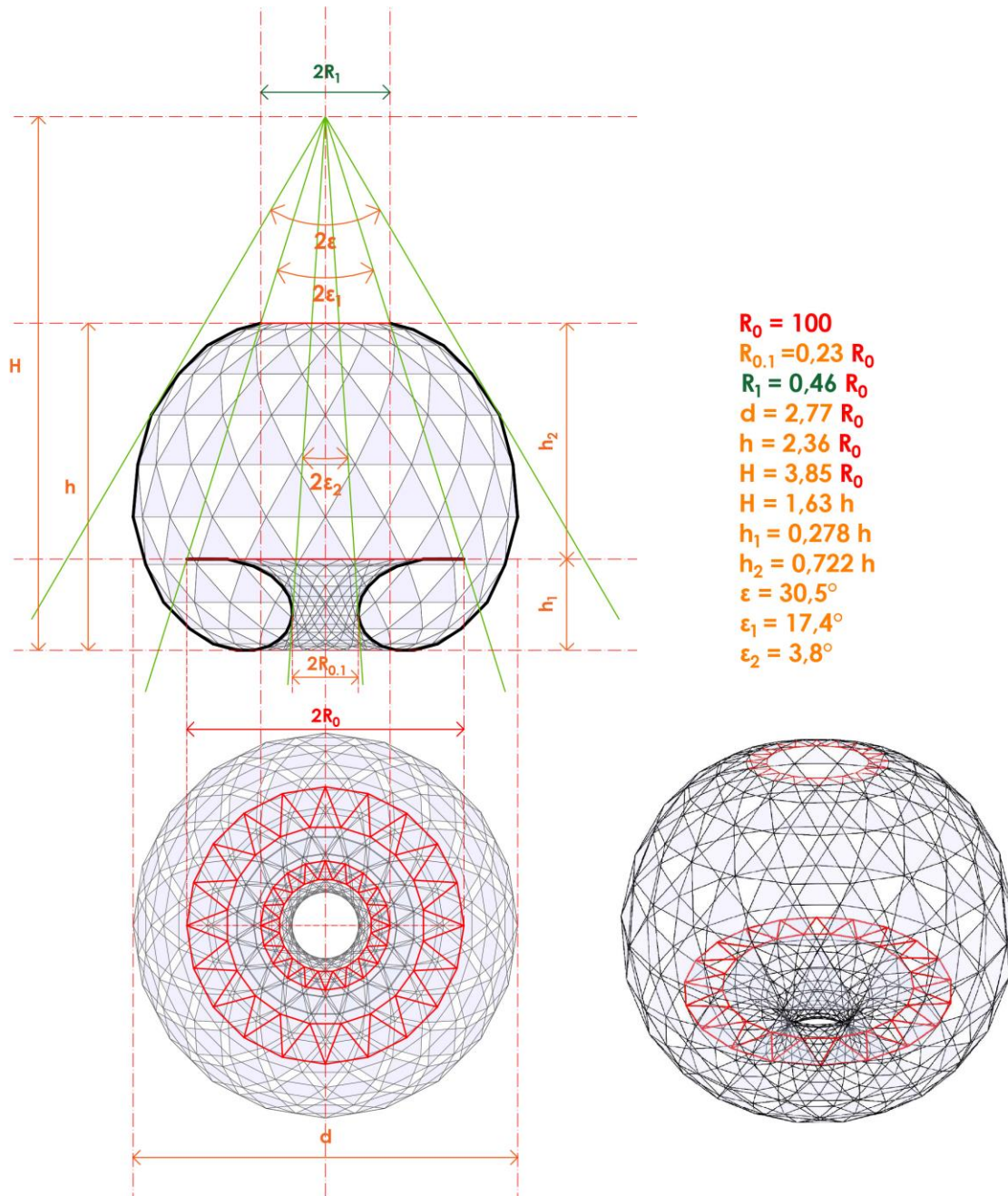
$$L_1 = R_1 \cdot \sin N$$

$$R_2 = R_0 \cdot \left(1 - \frac{\sin N \cdot \cos \gamma}{\tan \alpha}\right) \cdot \left(1 - \frac{\sin N \cdot \cos 2\gamma}{\tan \alpha}\right)$$

$$L_2 = R_2 \cdot \sin N$$



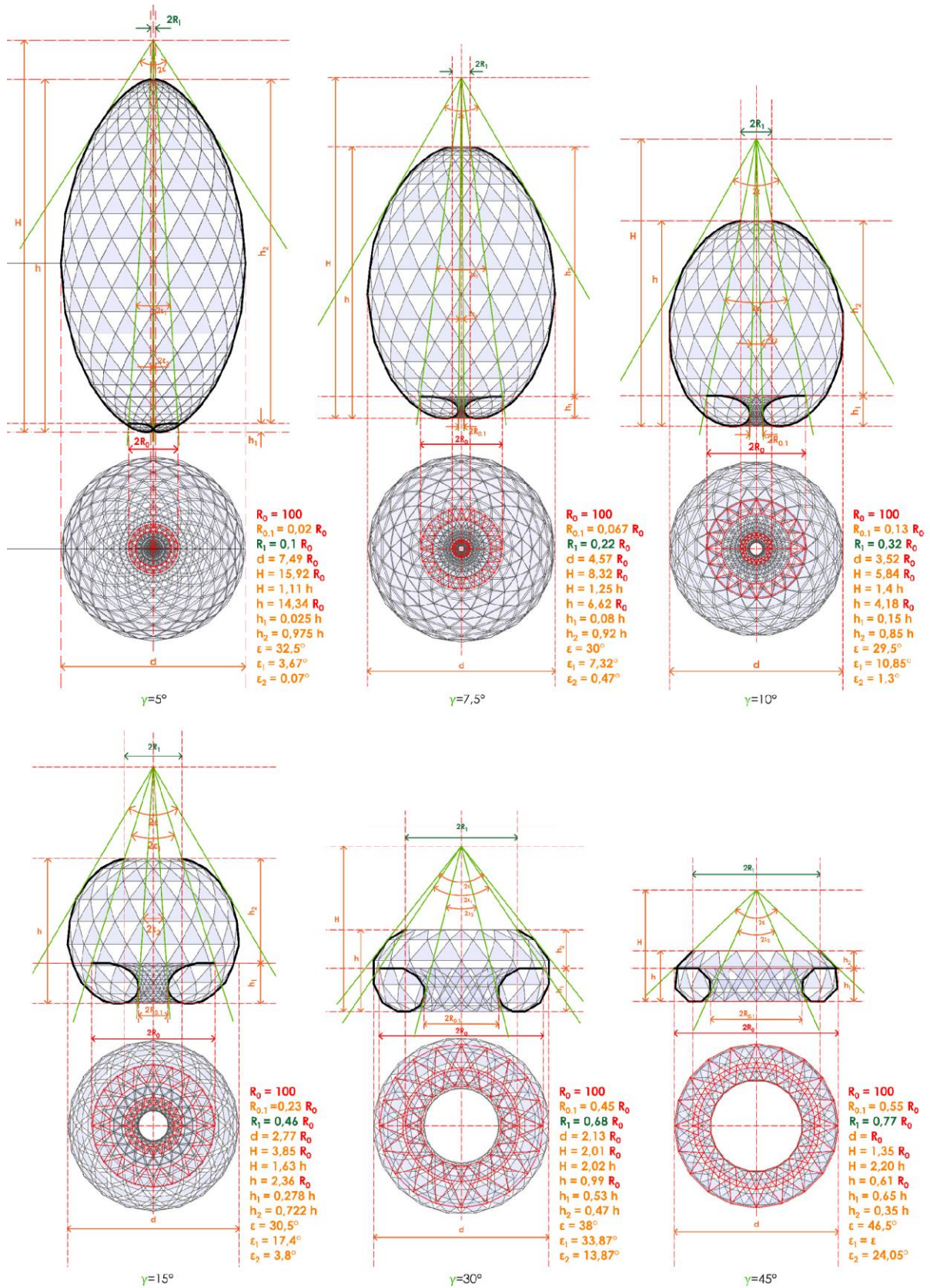
Figuur 3: de 'zee-egel' voor $n=20$, $\alpha=30^\circ$, en $\gamma=15^\circ$.



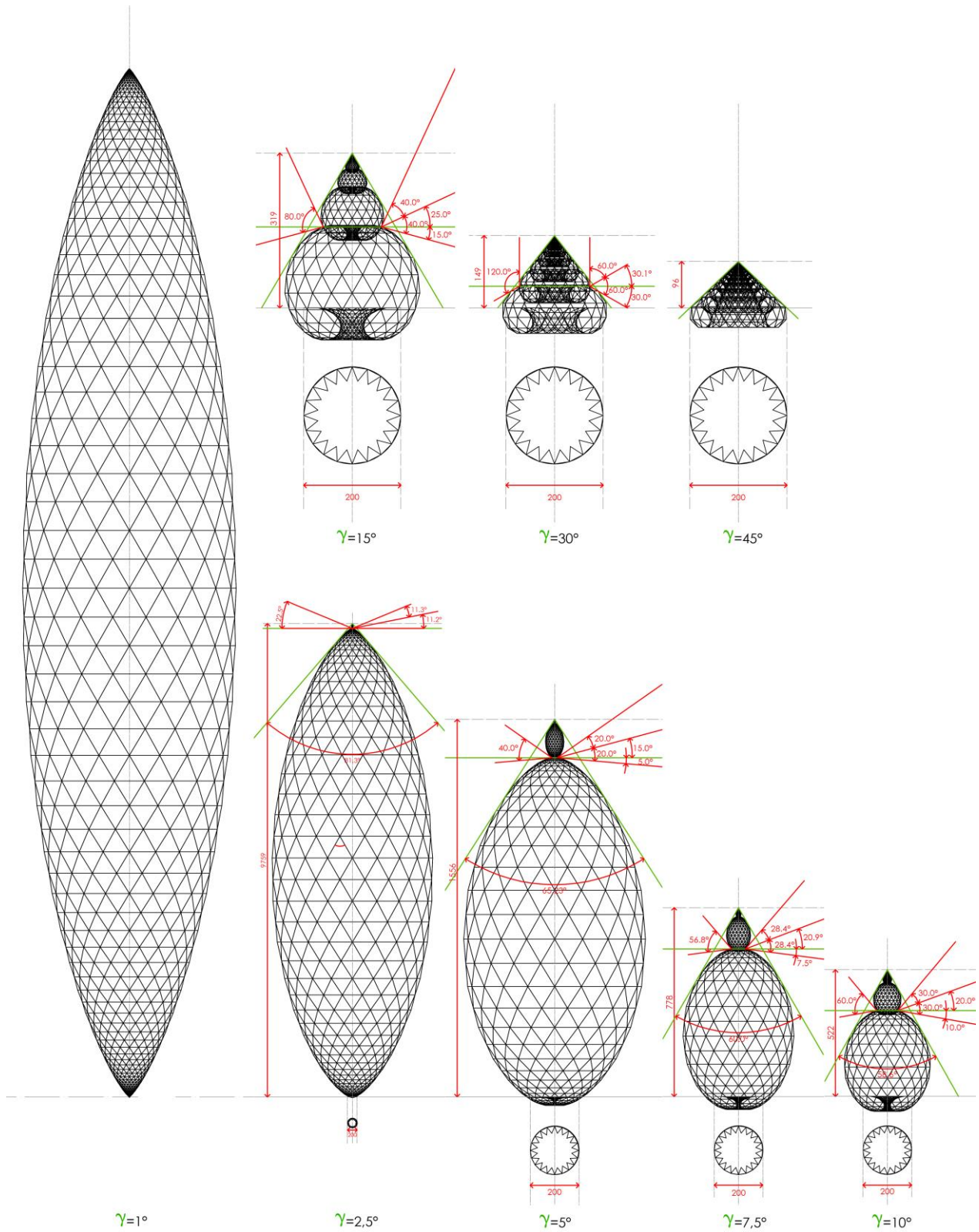
1. De stap « $\gamma = 90^\circ/i$ ».

Een polyhedron bestaande uit $n=20$ zijden en gelijkzijdige driehoeken, met $2\alpha = 60^\circ$, worden willekeurig genomen als uitgangsvorm. De waarden van γ , bewust gekozen zodat deze steeds van 0° tot 90° gaat (dat wil zeggen $\gamma = 90^\circ/i$, met i als een geheel getal), zijn respectievelijk 45° ; 30° ; 15° ; 10° ; $7,5^\circ$; 5° ; $2,5^\circ$; 1° . De initiële driehoeken kunnen zowel binnen als buiten de aanvankelijke regelmatige veelhoek geplaatst worden. Figuur 4 illustreert de eerste 'zee-egels' die overeenkomen met de eerste zes waarden van γ . Figuur 5 illustreert hun opeenstapeling (voor de acht waarden van γ).

Figuur 4: de eerste 'zee-egels' $n = 20$; $\alpha = 30^\circ$; $\gamma = 90^\circ/j$.



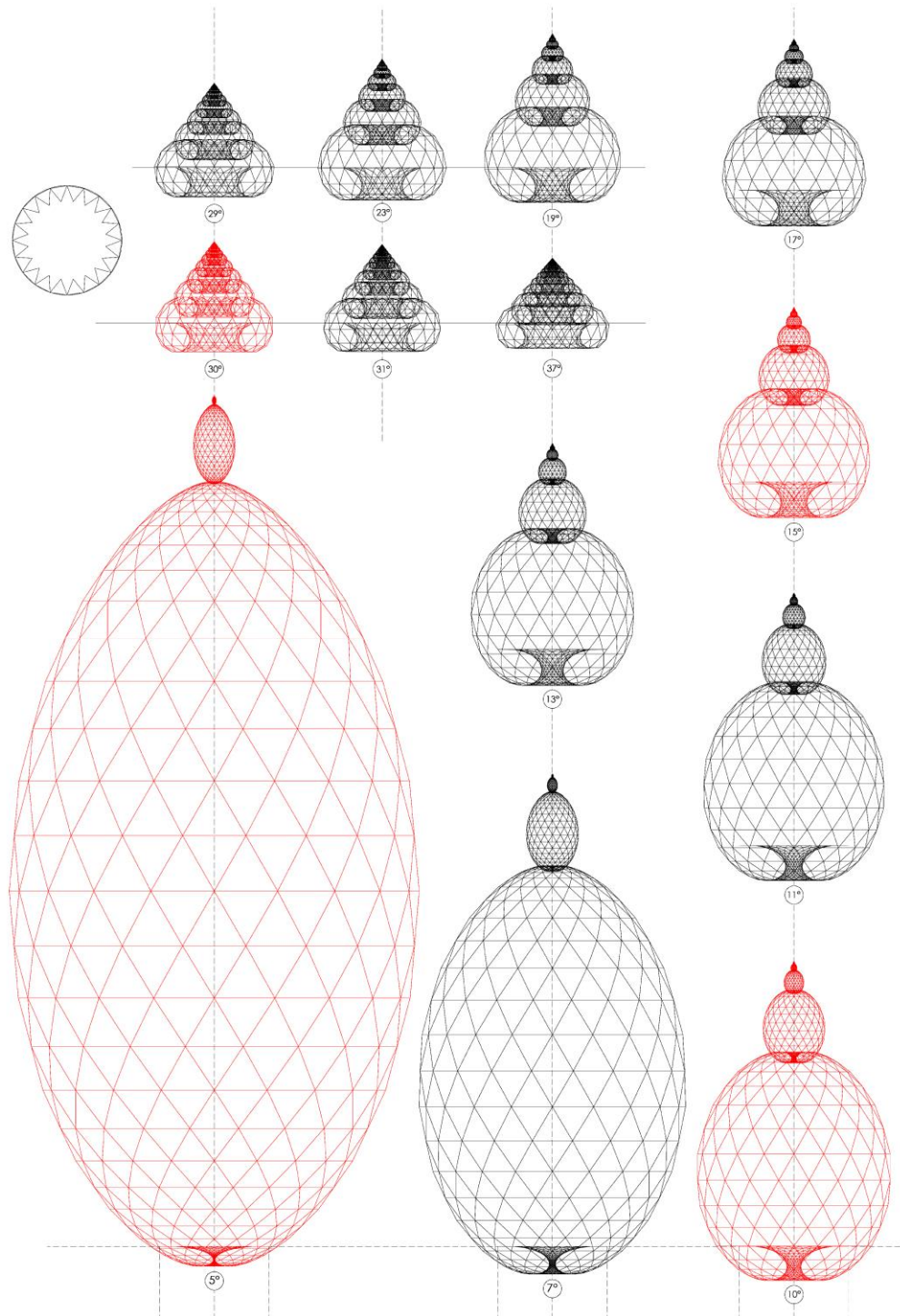
Figuur 5: het stapelen van 'zee-egels' voor $n = 20$; $\alpha = 30^\circ$; $\gamma = 90^\circ/i$.



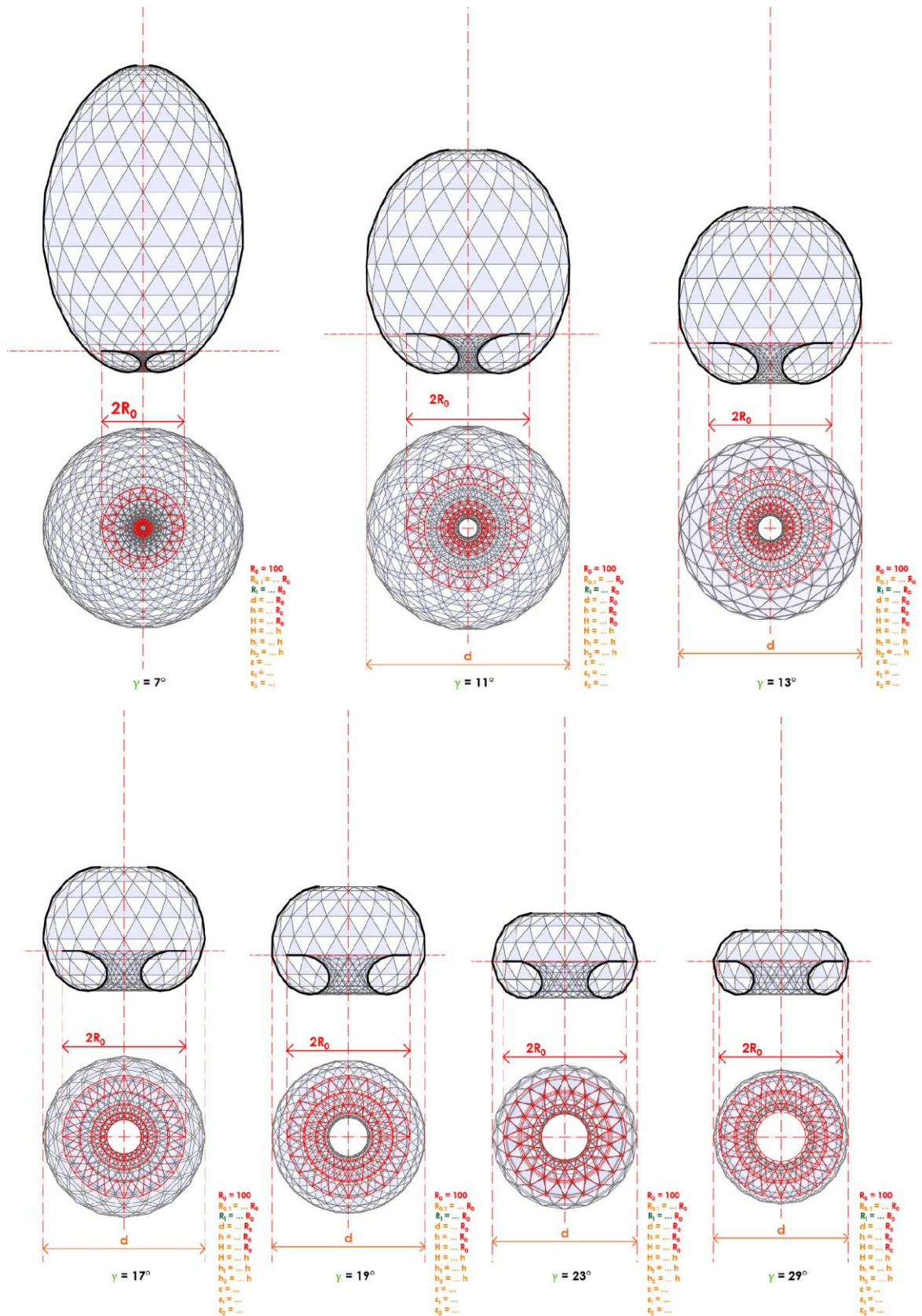
2. De stap « $\gamma \neq 90^\circ/i$ ».

De algemene vorm verandert niet substantieel wanneer $\gamma \neq 90^\circ/i$, zoals geïllustreerd in figuur 6 voor $\gamma = 7^\circ, 11^\circ, 13^\circ, 17^\circ, 19^\circ, 23^\circ, 29^\circ, 31^\circ$, en 37° (de priemgetallen die geen sub-veelvouden zijn van 90°) met de vier vormen, in het rood, voor $\gamma = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$, en 30° (onder veelvouden van 90°) behalve dat het deel uitmaakt van een iets 'gebogen' kegel met een negatieve Gaussische kromming. Figuur 7 illustreert de 'zee-egels' vanaf het vertrekpunt.

Figuur 6



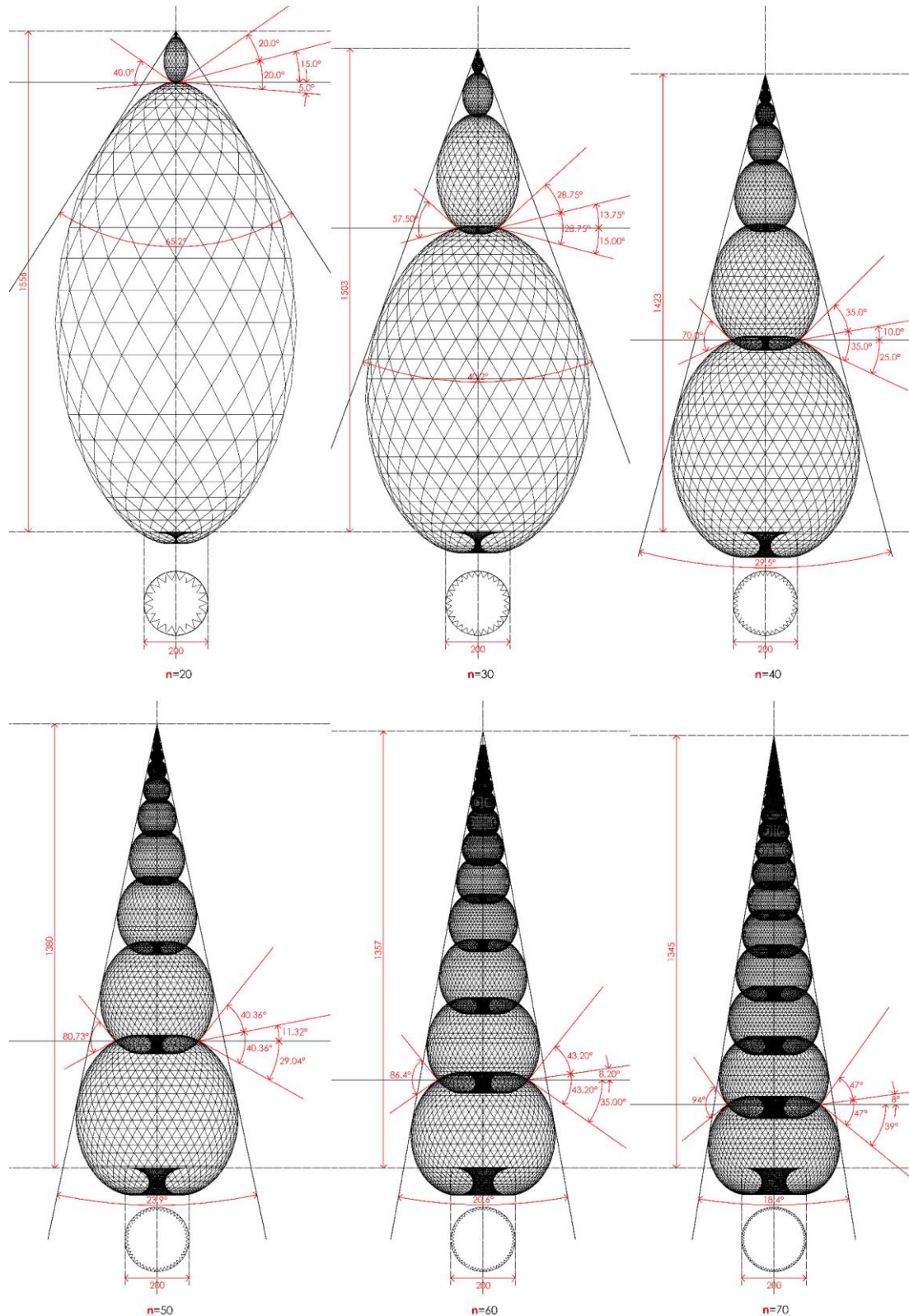
Figuur 7: De eerste 'zee-egels' voor de priemgetallen



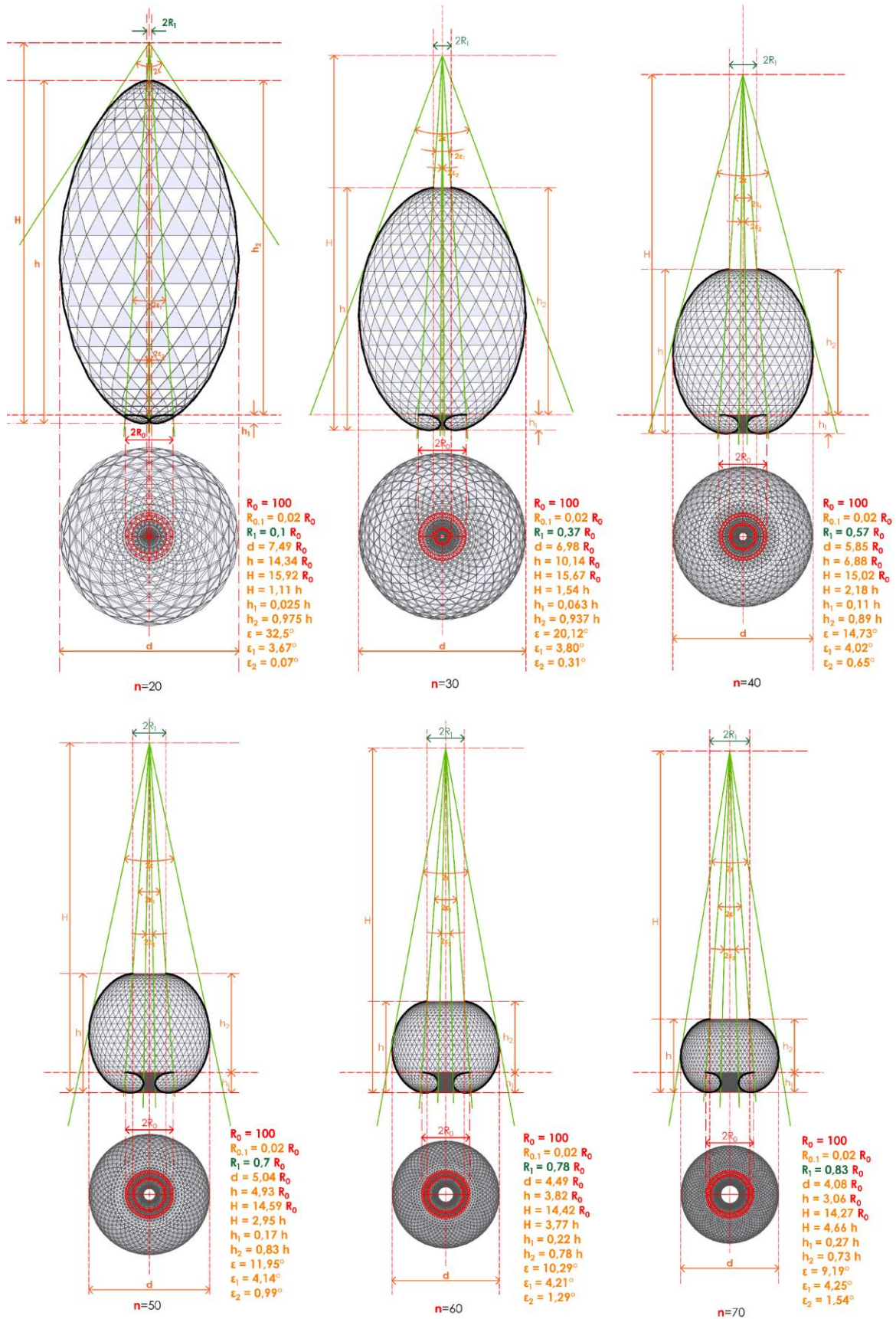
3. Het polyhedron voor verschillende waarden « n ».

De polyhedron wordt vervolgens getekend voor de waarden van **n** gelijk aan 20, 30, 40, 50, 60, en 70 met $\alpha=30^\circ$ en $\gamma=5^\circ$ (figuur 8). Figuur 9 illustreert de overeenkomstige 'zee-egels'.

Figuur 8: n variabele; $\alpha = 30^\circ$; $\gamma = 5^\circ$



Figuur 9: De 'zee-egels' voor n variabele; $\alpha = 30^\circ$; $\gamma = 5^\circ$.



4. Het polyhedron voor verschillende hoeken α

De vorm kan ook worden getekend met verschillende α . Deze wordt ingekort wanneer α toeneemt, zoals weergegeven in figuur 10 voor $\alpha = 45^\circ$ (met $n=20$ en verschillende γ) en vice versa wordt deze verlengt als α afneemt.

Figuur 10: Het stapelen van 'zee-egels' voor $n = 20$; $\alpha = 45^\circ$; $\gamma = 90^\circ/i$

